

A) INTRODUCTION

La prévision d'un processus aléatoire à l'aide de l'analyse harmonique (Complément : processus multivariés)

Dans notre thèse intitulé [CONTRIBUTION A LA PREVISION DES PROCESSUS ALEATOIRES PAR L'ANALYSE HARMONIQUE](#), j'ai proposé, page 66, une procédure simple pour réaliser la prévision dans le temps d'un ensemble de données temporelles cohérentes. Cette méthode se limitait aux processus univariés.

Le principe de la méthode est de calculer l'opérateur de covariance du processus afin d'isoler un nombre fini de composantes temporelles, de prolonger ces dernières par une des méthodes standards de prolongement de données chronologiques et de recomposer le processus sur la partie ainsi prolongée.

Testée sur un nombre d'exemples concrets cette méthode donne de meilleurs résultats que la méthode qui consiste à prolonger chaque donnée.

Les tests effectués sont simples : On suppose que l'on dispose d'une famille Ω de données temporelles définies sur un intervalle $[a, b]$. On génère à l'aide de l'opérateur de covariance les composantes temporelles sur l'intervalle $[a, c]$ ($c \in [a, b]$). Puis on sélectionne le nombre de composantes temporelles significatives à l'aide de « l'indice fort ». Enfin on prolonge les données sur l'intervalle $[c, b]$ de deux manières différentes : une première fois en les prolongeant à l'aide des composantes temporelles et une autre fois en prolongeant chaque donnée.

Finalement on compare les deux résultats obtenus aux données réelles sur $[c, b]$.

L'expérience montre que l'erreur moyenne obtenue en utilisant les composantes temporelles pouvait être estimée à 1.5% et devenait 3% quand le prolongement était réalisé sur chaque donnée temporelle.

La limitation de ce travail à des processus univariés fait perdre une part importante de l'intérêt de la méthode. Les processus dans la pratique sont souvent multivariés et la généralisation de la méthode ne m'a pas semblé facile au début. En reprenant ce travail plusieurs années après j'ai trouvé un chemin qui permet cette généralisation.

Pour généraliser la méthode de prévision des données des processus univariés aux processus multivariés, il fallait parcourir plusieurs étapes (dans un premier temps, je me suis limité au processus aléatoires bivariés) :

1. [Définir correctement l'opérateur de covariance lié à un processus bivarié.](#)
2. [Exprimer la fonction variance d'un processus aléatoire bivarié à l'aide de ces fonctions propres](#)
3. [Calculer le premier vecteur propre de l'opérateur de covariance par itération](#)
4. Prolonger chaque composante temporelle par des méthodes classiques
5. Reconstituer le processus et sa prévision

En suivant les liens ci-dessus vous trouverez le détail des démonstrations.

Vous trouverez aussi des résultats utiles en suivant le lien ci-après

6. [Forme particulière du noyau après modification du processus](#)

Pour faciliter la lecture voici les définitions et les formules qui sont à retenir :

	Processus univarié	Processus bivarié
Espaces des fonctions de carré intégrable	Ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $R (L^2(R))$	Ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $R \times R (L^2(R^2) \text{ ou } L^2([a,b], R^2))$
Si f est une fonction de valeur $f(t)$	$t \in [a, b] \rightarrow f(t) \in R$	$t \in [a, b] \rightarrow f(t) \in R^2$ $f(t) = f_1(t)\vec{e_1} + f_2(t)\vec{e_2}$
Produit scalaire de deux fonctions f et g	$\langle f/g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$	$\langle\langle f/g \rangle\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t)dt$
Processus	$\omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in L^2(R)$	$\omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in L^2(R^2)$ $X(\omega) = X_1(\omega)\vec{e_1} + X_2(\omega)\vec{e_2}$
Moyenne d'un processus	$E(X(\omega, t)) = \int_{\Omega} X(\omega, t) dP$	$E(X(\omega, t)) = \int_{\Omega} X(\omega, t) dP = \int_{\Omega} X_1(\omega, t)\vec{e_1} + X_2(\omega, t)\vec{e_2} dP\omega$
Processus centré	$X - E(X)$ $X(\omega) - E(X(\omega))$	$X(\omega) - E(X(\omega))$
Covariances	$N(t, t') = \int_{\Omega} X(\omega, t)X(\omega, t')dP(\omega)$	$N(t, t', 1, 1) = \int_{\Omega} X_1(\omega, t)X_1(\omega, t')dP(\omega)$ $N(t, t', 1, 2) = \int_{\Omega} X_1(\omega, t)X_2(\omega, t')dP(\omega)$ $N(t, t', 2, 1) = \int_{\Omega} X_2(\omega, t)X_1(\omega, t')dP(\omega)$ $N(t, t', 2, 2) = \int_{\Omega} X_2(\omega, t)X_2(\omega, t')dP(\omega)$
Noyaux de covariance	$N(t, t')$	$N(t, t') = \begin{bmatrix} N(t, t', 1, 1) & N(t, t', 1, 2) \\ N(t, t', 2, 1) & N(t, t', 2, 2) \end{bmatrix}$
Définition de la fonction variance	$V(X)(t) = E(X(\omega, t)^2)$ C'est à dire tout t , $V(X)(t) = E(X(\omega, t)^2) = \int_{\Omega} X(\omega, t)^2 dP(\omega)$	$V(X) = E\ X(\omega)\ _{R^2}^2$ C'est à dire tout t , $V(X)(t) = E\ X(\omega, t)\ _{R^2}^2 = \int_{\Omega} X_1^2(\omega, t) + X_2^2(\omega, t) dP(\omega)$
Calcul de la variance ou $\{f_i\}_{i \in N}$ l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur de covariance	$V(X) = \sum_i \lambda_i f_i^2$ C'est à dire tout t , $V(X)(t) = \sum_i \lambda_i f_i^2(t)$	$V(X) = \sum_i \lambda_i \ f_i\ _{R^2}^2$ C'est à dire tout t , $V(X)(t) = \sum_i \lambda_i f_{i1}^2(t) + \sum_i \lambda_i f_{i2}^2(t)$ Où $f_i(t) = f_{i1}^2(t) + f_{i2}^2(t)$
Convergence uniforme de la fonction variance (on donne ε et δ arbitrairement petits)	La série $\sum_i \lambda_i f_i^2$ converge presque uniformément c'est-à-dire il existe $p \in N$ tel que pour tout t , $[\sum_{i > p} \lambda_i f_i^2(t)] < \varepsilon$ sauf sur un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $[a, b]$ de mesure inférieure à δ	La série $\sum_i \lambda_i \ f_i\ _{R^2}^2$ converge presque uniformément c'est-à-dire il existe $p \in N$ tel que pour tout t , $[\sum_{i > p} f_{i1}^2(t) + \sum_{i > p} f_{i2}^2(t)] < \varepsilon$ sauf sur un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $[a, b]$ de mesure inférieure à δ
Indice fort de perte d'information (il permet de choisir les vecteurs)	C'est la quantité $\sum_{i > p} \lambda_i f_i^2(t)$	C'est la quantité : $\sum_i \lambda_i \ f_i\ _{R^2}^2$

propres à conserver)		
Calcul pratique du premier vecteur propre de l'opérateur de covariance U par itération	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U^n(g_0)(t)}{\ U^n(g_0)\ } = f_1(t)$ avec g_0 la fonction constante égale à 1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U^n(g_0)}{\ U^n(g_0)\ _{R^2}} = f_1$ avec $g_0 = 1e\vec{1} + 1e\vec{2}$ la fonction constante
Calcul pratique de la première valeur propre de l'opérateur de covariance U	Pour tout $t \in [a, b]$ $\frac{U(f_1)(t)}{f_1(t)} = \lambda_1$	Comme $U(f_1)(t) = \lambda_1 f_1(t) = U_1(f_1)(t) + U_2(f_1)(t) = \lambda_1 f_{1_1}(t) + \lambda_1 f_{1_2}(t)$ pour tout t , il suffit de calculer : $\frac{U(f_1)(t)}{f_1(t)} = \frac{U(f_1)(t)}{f_{1_2}(t)} = \lambda_1$
Calculs remarquables ou f est un vecteur propre de l'opérateur de covariance de valeur propre λ	$\int_{\Omega} X(\omega) < X(\omega)/f > dP\omega = \lambda f$	$\int_{\Omega} X(\omega) < X(\omega) / f > dP\omega = \lambda f$ soit $\int_{\Omega} X_1(\omega, t) < X(\omega) / f > dP\omega = \lambda f_1(t)$ et $\int_{\Omega} X_2(\omega, t) < X(\omega) / f > dP\omega = \lambda f_2(t)$
	$\int_{\Omega} < X(\omega)/f > < X(\omega)/f > dP\omega = \lambda$	$\int_{\Omega} < X(\omega)/f > < X(\omega) / f > dP\omega = \lambda$
Comportement du noyau de covariance suite à des modification du processus.	On suppose que $Y(\omega) = X(\omega) - < X(\omega)/f_1 > f_1$ $N_Y(t, t') =$	On suppose que $Y(\omega) = X(\omega) - < X(\omega)/f_1 > f_1$ Alors si $N_Y(1, 1, t, t')$ $N_Y(1, 2, t, t')$ $N_Y(2, 1, t, t')$ $N_Y(2, 2, t, t')$ est la matrice de covariance de Y $N_Y(1, 1, t, t') = Cov(X_1(t), X_1(t')) - \lambda_1 f_1(t) f_1(t')$ $N_Y(1, 2, t, t') = Cov(X_1(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_1(t) f_2(t')$ $N_Y(2, 1, t, t') = Cov(X_1(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_1(t) f_2(t')$ $N_Y(2, 2, t, t') = Cov(X_2(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_2(t) f_2(t')$

B) Paragraphe I

Opérateur de covariance des processus bivariés :

1. Notations et rappel de définitions utiles

a. Fonctions de carré intégrable à valeur dans $\mathbb{R}^2$

On donne deux fonctions $f = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2$ et $g = g_1 \vec{e}_1 + g_2 \vec{e}_2$ d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ la base naturelle de $\mathbb{R}^2$.

Alors le produit des fonctions f et g est : $f \cdot g = f_1 \cdot g_1 \vec{e}_1 + f_2 \cdot g_2 \vec{e}_2$

Son intégrale est alors $\int_a^b f \cdot g \, dt = \int_a^b f_1 g_1 \, dt + \int_a^b f_2 g_2 \, dt$

Le produit scalaire est défini par :

$$\langle f/g \rangle = \int_a^b f_1(t) g_1(t) + f_2(t) g_2(t) dt$$

b. Processus bivarié

Soit X un processus bivarié défini sur un espace probabilisé (Ω, T) par

$$X : (\omega) \longrightarrow X(\omega) \in L([a, b], \mathbb{R}^2)$$

Où $X(\omega, t) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions du segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$ de carré intégrable.

c. Noyau de covariance

On pose : $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ alors :

$$X(\omega, t) = X_1(\omega, t) \vec{e}_1 + X_2(\omega, t) \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad X(\omega, t') = X_1(\omega, t') \vec{e}_1 + X_2(\omega, t') \vec{e}_2$$

Ce qui définit quatre variables aléatoires $X_1(\omega, t)$, $X_2(\omega, t)$, $X_1(\omega, t')$ et $X_2(\omega, t')$ et les covariances correspondantes :

$$N(t, t', 1, 1) = \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_1(\omega, t') dP\omega$$

$$N(t, t', 1, 2) = \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') dP\omega$$

$$N(t, t', 2, 1) = \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_1(\omega, t') dP\omega$$

$$N(t, t', 2, 2) = \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_2(\omega, t') dP\omega$$

Le noyau de covariance est alors une matrice définie par

$$N(t, t') = \begin{bmatrix} N(t, t', 1, 1) & N(t, t', 1, 2) \\ N(t, t', 2, 1) & N(t, t', 2, 2) \end{bmatrix}$$

d. Opérateur de covariance

Soit f est une fonction réelle définie sur $T = [a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2$$

L'opérateur de covariance U est l'application linéaire associée au noyau de covariance

$$U(f) = \begin{bmatrix} N(t, t', 1, 1) & N(t, t', 1, 2) \\ N(t, t', 2, 1) & N(t, t', 2, 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Ce qui peut s'écrire vectoriellement :

$$U(f)(t) = \left[\int_T N(t, t', 1, 1) f_1(t') dt' + \int_T N(t, t', 1, 2) f_2(t') dt' \right] \vec{e}_1 + \left[\int_T N(t, t', 2, 1) f_1(t') dt' + \int_T N(t, t', 2, 2) f_2(t') dt' \right] \vec{e}_2$$

Ou encore :

$$U(f)(t) = \left[\int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_1(\omega, t') f_1(t') dP\omega dt' + \int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') f_2(t') dt' dP\omega \right] \vec{e}_1 + \left[\int_T \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_1(\omega, t') f_1(t') dt' dP\omega + \int_T \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_2(\omega, t') f_2(t') dt' dP\omega \right] \vec{e}_2$$

2. Opérateur de covariance et vecteur propre

Si f est un vecteur propre de valeur propre λ alors :

$$U(f) = \lambda f$$

d'où :

$$U(f)(t) = \left[\int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_1(\omega, t') f_1(t') dt' dP\omega + \int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') f_2(t') dt' dP\omega \right] \vec{e}_1 + \left[\int_T \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_1(\omega, t') f_1(t') dt' dP\omega + \int_T \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_2(\omega, t') f_2(t') dt' dP\omega \right] \vec{e}_2 = \lambda f_1(t) \vec{e}_1 + \lambda f_2(t) \vec{e}_2$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \lambda f_1(t) &= \int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_1(\omega, t') f_1(t') dt' dP\omega + \int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') f_2(t') dt' dP\omega = \\ &= \int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_1(\omega, t') f_1(t') dt' dP\omega + \int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') f_2(t') dt' dP\omega = \\ &= \int_{\Omega} X_1(\omega, t) \left[\int_a^b X_1(\omega, t') f_1(t') + X_2(\omega, t') f_2(t') dt' \right] dP\omega = \\ &= \int_{\Omega} X_1(\omega, t) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda f_2(t) &= \int_T \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_1(\omega, t') f_1(t') dt' dP\omega + \int_T \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_2(\omega, t') f_2(t') dt' dP\omega = \\ &= \int_{\Omega} X_2(\omega, t) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega \end{aligned}$$

Nous savons que (voir détail paragraphe

$$\int_{\Omega} X_1(\omega, t) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega = \lambda f_1(t)$$

Et que

$$\int_{\Omega} X_2(\omega, t) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega = \lambda f_2(t)$$

Où encore :

$$\lambda f(t) = \int_{\Omega} X(\omega, t) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega$$

C) Paragraphe II

Expression de la fonction variance d'un processus aléatoire bivarié à l'aide de ces fonctions propres

1. Définition

Soit X un processus bivarié défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$X : (\omega) \longrightarrow X(\omega) \in L^2([a, b], \mathbb{R}^2)$$

$X(\omega)$ est la fonction qui pour tout $t \in [a, b]$ a pour image $X(\omega, t) \in \mathbb{R}^2$

Alors la fonction variance est définie par :

$$V(X) = E \|X(\omega)\|_{\mathbb{R}^2}^2$$

Où $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^2}$ désigne la norme dans $\mathbb{R}^2$.

$V(X)$ prend alors, pour tout t , la valeur : $V(X)(t) = \int_{\Omega} \|X(\omega, t)\|_{\mathbb{R}^2}^2 dP\omega$

Soient $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un ensemble des valeurs propres orthonormées de l'opérateur de covariance U et $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée du noyau de U . L'ensemble $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{g_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ forme une base orthonormée de l'espace des fonctions de $L^2([a, b], \mathbb{R}^2)$.

Pour tout ω , $X(\omega) = \sum_i \langle X(\omega)/f_i \rangle f_i + \sum_j \langle X(\omega)/g_j \rangle g_j$

D'autre part

$$\|X(\omega, t)\|_{\mathbb{R}^2}^2 = \left\langle \sum_i \langle X(\omega)/f_i \rangle f_i + \sum_j \langle X(\omega)/g_j \rangle g_j \right\rangle \left\langle \sum_i \langle X(\omega)/f_i \rangle f_i + \sum_j \langle X(\omega)/g_j \rangle g_j \right\rangle$$

où $\langle \cdot / \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\langle \cdot / \cdot \rangle$ celui dans $L^2([a, b], \mathbb{R}^2)$ des fonctions de carré intégrable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$.

L'espérance du développement de l'expression ci-dessus génère une série de terme général

$$E(\langle X(\omega)/h_i \rangle \langle X(\omega)/k_j \rangle) = \langle h_i/k_j \rangle$$

où h et k peuvent prendre la valeur f ou g .

Comme

$$\begin{aligned} \langle X(\omega)/h_i \rangle &= \int_a^b X_1(\omega, t) h_{i1}(t) dt + \int_a^b X_2(\omega, t) h_{i2}(t) dt \\ \langle X(\omega)/k_j \rangle &= \int_a^b X_1(\omega, t') k_{j1}(t') dt' + \int_a^b X_2(\omega, t') k_{j2}(t') dt' \end{aligned}$$

$$\text{On a : } E(\langle X(\omega)/h_i \rangle \langle X(\omega)/k_j \rangle) = (A + B + C + D) \langle h_i/k_j \rangle$$

Avec

$A =$

$$\int_{\Omega} \int_a^b X_1(\omega, t) h_{i1}(t) dt \int_a^b X_1(\omega, t') k_{j1}(t') dt' dP\omega$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') dP \omega k_{j_1}(t') dt' h_{i_1}(t) dt$$

B =

$$\int_{\Omega} \int_a^b X_1(\omega, t) h_{i_1}(t) dt \int_a^b X_2(\omega, t') k_{j_2}(t') dt' dP \omega$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') dP \omega k_{j_2}(t') dt' h_{i_1}(t) dt$$

C =

$$\int_{\Omega} \int_a^b X_2(\omega, t') k_{j_2}(t') dt' \int_a^b X_1(\omega, t) h_{i_1}(t) dt dP \omega$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_{\Omega} X_2(\omega, t') X_1(\omega, t) dP \omega k_{j_2}(t') dt' h_{i_1}(t) dt$$

D =

$$\int_{\Omega} \int_a^b X_2(\omega, t) h_{i_2}(t) dt \int_a^b X_2(\omega, t') k_{j_2}(t') dt' dP \omega$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_2(\omega, t') dP \omega k_{j_2}(t') dt' h_{i_2}(t) dt$$

On pose

$$M(k_{j_1}) = \int_a^b \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') dP \omega k_{j_1}(t') dt' + \int_a^b \int_{\Omega} X_2(\omega, t') X_1(\omega, t) dP \omega k_{j_2}(t') dt'$$

Et

$$N(k_{j_2}) = \int_a^b \int_{\Omega} X_1(\omega, t) X_2(\omega, t') dP \omega k_{j_2}(t') dt' + \int_a^b \int_{\Omega} X_2(\omega, t) X_2(\omega, t') dP \omega k_{j_2}(t') dt'$$

Alors, si U désigne l'opérateur de covariance et $k_j = k_{j_1} \vec{e}_1 + k_{j_2} \vec{e}_2$

$$U(k_j) = M(k_{j_1}) \vec{e}_1 + N(k_{j_2}) \vec{e}_2$$

Si k_j est un vecteur propre de U de valeur propre λ_j ou un vecteur du noyau de U où $\lambda = 0$

$$U(k_j) = \lambda_j k_j = \lambda_j k_{j_1} \vec{e}_1 + \lambda_j k_{j_2} \vec{e}_2$$

$\langle\langle U(k_j) / h_i \rangle\rangle = \lambda_j \langle\langle k_j / h_i \rangle\rangle$ qui est nul sauf si $k_j = h_i$ et ne sont pas dans le noyau de l'opérateur.

Dans ce dernier cas :

$$\langle\langle U(h_i) / h_i \rangle\rangle = \lambda_i \langle\langle h_i / h_i \rangle\rangle = \lambda_i \|h_i\|_{R^2}^2$$

On remarque que :

$$\int_a^b M(k_{j_1}) h_{i_1} dt = A + C \text{ et que } \int_a^b N(k_{j_2}) h_{i_2}(t) dt = B + D$$

D'où

$$V(X) = E \|X(\omega)\|_{R^2}^2 = \sum_i \lambda_i \|f_i\|_{R^2}^2$$

C'est-à-dire :

$$V(X)(t) = \sum_i \lambda_i f_{i1}^2(t) + \sum_i \lambda_i f_{i2}^2(t)$$

Ces deux séries convergent car :

$$\sum_i \lambda_i f_{i1}^2(t) \leq \sum_i \lambda_i f_{i1}^2(t) + \sum_i \lambda_i f_{i2}^2(t) = V(X)(t)$$

Ces séries étant constituées de fonctions positives, elles sont « presque uniformément convergentes. (voir la thèse de Gabriel Cohen page 73 à l'adresse

<https://evallib.org/These/Doctorat%20Gabriel%20Cohen%20Pr%C3%A9vision%20des%20processus%20al%C3%A9atoires%20par%20l'analyse%20harmonique%201999.pdf>)

Cela permet de définir un indice fort de convergence, c'est-à-dire si on se donne ε et δ arbitrairement petits il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout t , on ait

$$\left[\sum_{i>p} f_{i1}^2(t) + \sum_{i>p} f_{i2}^2(t) \right] < \varepsilon$$

sauf sur un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $[a, b]$ de mesure inférieure à δ .

Dans la pratique $\mathcal{H}$ est de mesure nulle.

Ce critère permet de sélectionner les $p-1$ premières composantes temporelles pour les utiliser lors d'une prévision.

D) Paragraphe III

Calcul pratique de premier vecteur propre de l'opérateur de covariance par itération

1. Calcul du premier vecteur propre

Le premier vecteur propre de l'opérateur de covariance U est la limite quand n tend vers l'infini du vecteur $\frac{U^n(g_0)}{\|U^n(g_0)\|}$ où g_0 est un vecteur arbitraire (par exemple pour un opérateur de covariance bivarié pour tout $t \in [a, b]$)

$$g_0(t) = g_{01}(t)\vec{e_1} + g_{02}(t)\vec{e_2} = 1. \vec{e_1} + 1. \vec{e_2}$$

Rappel de la démonstration :

$$g_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g_0 / f_i \rangle f_i$$

Où $\{f_i\}_i$ est une base de vecteurs propres orthonormés

$$\frac{U^n(g_0)}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} = \frac{\lambda_1^n \langle g_0 / f_1 \rangle f_1}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^n \langle g_0 / f_i \rangle f_i}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}}$$

$$\text{Or } U^n(g_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n \langle g_0 / f_i \rangle f_i \text{ et}$$

$$\|U^n(g_0)\|_{R^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2n} \langle g_0 / f_i \rangle^2 = \lambda_1^{2n} \langle g_0 / f_1 \rangle^2 \left[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^{2n} \langle g_0 / f_i \rangle^2}{\lambda_1^{2n} \langle g_0 / f_1 \rangle^2} \right]$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n(g_0)\|_{R^2} = \lambda_1^n \langle g_0 / f_1 \rangle$$

car $\lambda_1 > \lambda_i > 0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^{2n} \langle g_0 / f_i \rangle^2}{\lambda_1^{2n} \langle g_0 / f_1 \rangle^2} &= \frac{1}{\langle g_0 / f_1 \rangle^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^{2n}}{\lambda_1^{2n}} \langle g_0 / f_i \rangle^2 \\ &\leq \frac{1}{\langle g_0 / f_1 \rangle^2} \frac{\lambda_2^{2n}}{\lambda_1^{2n}} \sum_{i=2}^{\infty} \langle g_0 / f_i \rangle^2 \leq \frac{1}{\langle g_0 / f_1 \rangle^2} \frac{\lambda_2^{2n}}{\lambda_1^{2n}} \sum_{i=2}^{\infty} \langle g_0 / f_i \rangle^2 \\ &= \frac{1}{\langle g_0 / f_1 \rangle^2} \frac{\lambda_2^{2n}}{\lambda_1^{2n}} \|g_0\|_{R^2}^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U^n(g_0)}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^n \langle g_0 / f_1 \rangle f_1}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^n \langle g_0 / f_i \rangle f_i}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} = f_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^n \langle g_0 / f_i \rangle f_i}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}}$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^n \langle g_0 / f_i \rangle f_i}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} = 0$ pour démontrer la dernière égalité, il suffit de calculer sa norme et

$$\text{la majorer par } \left\| \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^n \langle g_0 / f_i \rangle f_i}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} \right\| \leq \frac{\lambda_2^n}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} \|g_0\|_{R^2}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U^n(g_0)}{\|U^n(g_0)\|_{R^2}} = f_1$$

2. Calcul de la première valeur propre

Comme $U(f_1)(t) = \lambda_1 f_1(t) = U_1(f_1)(t) + U_2(f_1)(t) = \lambda_1 f_{1_1}(t) + \lambda_1 f_{1_2}(t)$ pour tout t Il suffit de calculer $\frac{U(f_1)(t)}{f_{1_1}(t)} = \frac{U(f_1)(t)}{f_{1_2}(t)} = \lambda_1$

Remarque U_1 n'a rien à voir avec l'opérateur de covariance associé à $X_1(\omega)$

3. Calcul du second vecteur propre

Pour calculer le second vecteur propre de l'opérateur U on choisi un vecteur aléatoire g_0 et on calcule le premier vecteur propre par la formule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U^n(g_0)}{\|U^n(g_0)\|} = f_1$

Et sa valeur propre λ_1 associée. On pose $g_1 = g_0 - \langle\langle g_0 / f_1 \rangle\rangle f_1$.

Alors $g_1 = \sum_{i \geq 2} \langle\langle g_0 / f_i \rangle\rangle f_i$.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U^n(g_1)}{\|U^n(g_1)\|} = f_2$ car $U^n(f_1) = 0$

Et $\lambda_2 = \frac{U(f_2)(t_0)}{f_2(t_0)}$

E) Paragraphe IV

Forme particulière du noyau après modification du processus

1. Préambule :

a. Lemme 1(rappel)

Si f est un vecteur propre de U

$$\int_{\Omega} X(\omega) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega = \lambda f$$

• Preuve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} X(\omega) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega \\ &= \int_{\Omega} X(\omega) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega \overrightarrow{e_1} + \int_{\Omega} X(\omega) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega \overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

Rappelons que pour tout vecteur son image par U se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} U(f)(t) &= \left[\int_T N(t, t', 1, 1) f_1(t') dt' + \int_T N(t, t', 1, 2) f_2(t') dt' \right] \overrightarrow{e_1} \\ &+ \left[\int_T N(t, t', 2, 1) f_1(t') dt' + \int_T N(t, t', 2, 2) f_2(t') dt' \right] \overrightarrow{e_2} = \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} X_1(\omega, t) \ll X(\omega) / f \gg dP\omega = \\ & \int_T \int_{\Omega} X_1(\omega, t) \cdot X_1(\omega, t) dP\omega f_1(t') dt' + \int_T \int_{\Omega} X_2(\omega, t) \cdot X_1(\omega, t) dP\omega f_2(t') = \\ & \int_T N(t, t', 1, 1) f_1(t') dt' + \int_T N(t, t', 1, 2) f_2(t') dt' = \lambda f_1 \\ & \text{d'où :} \\ & U(f)(t) = \lambda f_1(t) \overrightarrow{e_1} + \lambda f_2(t) \overrightarrow{e_2} = \lambda f(t) \end{aligned}$$

a. Lemme 2

$$\int_{\Omega} \ll X(\omega) / f \gg \ll X(\omega) / f \gg dP\omega = \lambda$$

• Preuve :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \ll X(\omega) / f \gg \ll X(\omega) / f \gg dP\omega = \int_{\Omega} \ll X(\omega) \ll X(\omega) / f \gg / f \gg dP\omega = \\ & \int_{\Omega} \int_a^b X(\omega, u) \ll X(\omega) / f \gg f(u) du dP\omega = \int_a^b \int_{\Omega} X(\omega, u) \ll X(\omega) / f \gg f(u) du dP\omega = \\ & \int_a^b \lambda f(u) f(u) du = \lambda \ll f / f \gg = \lambda \end{aligned}$$

2. Modification du noyau de covariance en fonction

Nous nous proposons de regarder la forme du noyau de covariance d'un processus Y dont on aurait modifié les données de la façon suivante :

$$Y(\omega) = X(\omega) - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_1$$

Où f_1 est le premier vecteur propre de X de valeur propre λ_1

Le noyau de covariance de Y est la matrice :

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} Y_1(\omega) Y_1(\omega) dP\omega & \int_{\Omega} Y_1(\omega) Y_2(\omega) dP\omega \\ \int_{\Omega} Y_1(\omega) Y_2(\omega) dP\omega & \int_{\Omega} Y_2(\omega) Y_2(\omega) dP\omega \end{pmatrix}$$

Où

$$Y(\omega) = X(\omega) - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_1 = Y_1(\omega) \vec{e}_1 + Y_2(\omega) \vec{e}_2 =$$

$$[X_1(\omega) - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_{1_1}] \vec{e}_1 + [X_2(\omega) - \ll X(\omega) / f_2 \gg f_{1_2}] \vec{e}_2$$

Dans un premier temps calculons :

$$\int_{\Omega} [Y_1(\omega, t)][Y_1(\omega, t')] dP\omega$$

Comme

$$Y_1(\omega, t) = X_1(\omega, t) - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_{1_1} \text{ et}$$

$$Y_1(\omega, t) = X_1(\omega, t) - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_{1_1}$$

On a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [Y_1(\omega, t)][Y_1(\omega, t')] dP\omega \\ &= \int_{\Omega} [X_1(\omega, t) - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_{1_1}(t)][X_1(\omega, t') - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_{1_1}(t')] dP\omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [X_1(\omega, t)X_1(\omega, t')] dP\omega \\ & - \int_{\Omega} [X_1(\omega, t) \ll X(\omega) / f_1 \gg] dP\omega f_{1_1}(t') \\ & - \int_{\Omega} [X_1(\omega, t') \ll X(\omega) / f_1 \gg] dP\omega f_{1_1}(t) \\ & + \int_{\Omega} \ll X(\omega) / f_1 \gg \ll X(\omega) / f_1 \gg dP\omega f_{1_1}(t)f_{1_1}(t') = \\ & = \\ &= Cov(X_1(t), X_1(t')) - \lambda_1 f_1(t)f_1(t') - \lambda_1 f_1(t')f_1(t) + \lambda_1 f_1(t')f_1(t) = \\ & Cov(X_1(t), X_1(t')) - \lambda_1 f_1(t')f_1(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} [Y_1(\omega, t)][Y_1(\omega, t')] dP\omega = Cov(X_1(t), X_1(t')) - \lambda_1 f_1(t)f_1(t')$$

Calculons maintenant :

$$\int_{\Omega} [Y_1(\omega, t)][Y_2(\omega, t')] dP\omega$$

Comme

$$Y_1(\omega, t) = X_1(\omega, t) - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_{1_1}(t) \text{ et}$$

$$Y_2(\omega, t') = X_2(\omega, t') - \ll X(\omega) / f_1 \gg f_{1_2}(t')$$

On a :

$$\int_{\Omega} [Y_1(\omega, t)][Y_2(\omega, t')] dP\omega =$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [X_1(\omega, t)X_2(\omega, t')] dP\omega \\
 & - \int_{\Omega} [X_1(\omega, t) \ll X(\omega) / f_1 \gg] dP\omega f_{1_2}(t') \\
 & - \int_{\Omega} [X_2(\omega, t') \ll X(\omega) / f_1 \gg] dP\omega f_{1_1}(t) \\
 & + \int_{\Omega} \ll X(\omega) / f_1 \gg \ll X(\omega) / f_1 \gg dP\omega f_{1_1}(t)f_{1_2}(t') =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}(X_1(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_1(t)f_2(t') - \lambda_1 f_2(t')f_1(t) + \lambda_1 f_1(t)f_2(t') = \\
 & \text{Cov}(X_1(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_1(t)f_1(t')
 \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} [Y_1(\omega, t)][Y_2(\omega, t')] dP\omega = \text{Cov}(X_1(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_1(t)f_2(t')$$

Par analogie, le noyau de covariance de Y est alors la matrice :

$$\text{Cov}(X_1(t), X_1(t')) - \lambda_1 f_1(t)f_1(t')$$

$$\text{Cov}(X_1(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_1(t)f_2(t')$$

$$\text{Cov}(X_1(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_1(t)f_2(t')$$

$$\text{Cov}(X_{12}(t), X_2(t')) - \lambda_1 f_2(t)f_2(t')$$